Лекция 8
Признаки сходимости числового ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- Сформировать у студентов умение применять классические признаки сходимости ряда — признаки Даламбера, Коши и интегральный признак — для исследования поведения бесконечных рядов.

Основные вопросы:

1. Признак Даламбера (отношений).

2. Признак Коши (радикальный).

3. Интегральный признак сходимости.

4. Связь признаков между собой и области применения каждого.

Признак Даламбера

Если существует конечный $q = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ то

1)при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k > 0$, сходится,

2)при $q > 1$ ряд расходится,

3)при $q = 1$ признак ответа не дает.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$

Так как $u_n = \frac{2n}{e^n}$, то $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)e^n}{e^{n+1}2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{en} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e}$$

Так как $\frac{1}{e} < 1$, то данный ряд сходится.

Признак Коши

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = e,$ то

1) при $e < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$, сходится,

2)при $e > 1$ ряд расходится,

3)при $e = 1$ признак ответа не дает.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ исследуем с помощью признака Коши.

Вычислим $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \frac{3n+1}{n+2}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$

и ряд согласно признаку Коши расходится.

Интегральный признак

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $u_n > u_{n+1}$ при $\forall n \in N$. Пусть функция $f(x)$ при $x = n$ имеет значения $f(n) = u_n$, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x > 1$. Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int\limits_1^\infty x^{-p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^\infty = \frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

. Ряд расходится при $p<1$ и сходится при $p>1$.

Контрольные вопросы

- **В чём заключается признак Даламбера?**
- **Как формулируется признак Коши?**
- **Какие условия применимости интегрального признака?**
- **Почему в признаках Даламбера и Коши важен предел <, > или = 1?**
- **Приведите пример ряда, к которому удобно применять признак Даламбера.**
- **Приведите пример ряда, удобного для признака Коши.**
- **Почему интегральный признак не работает для немонотонных функций?**

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.